**تمرين:**

لتكن $f$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة بـ :

$$\begin{cases} f(x)=e^{\frac{1}{x}}-x\,(x<0) \\ f(0)=0 \\ f(x)=x^3\ln x-\frac{x^2}{2}\,(x>0) \end{cases}$$

و ليكن $(Cf)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

1 ـ بين أن $f$ متصلة في الصفر.

2 ـ أدرس اشتقاق $f$ في الصفر .

إعط التأويل الهندسي لهذه النتيجة .

3 ـ أدرس نهايات $f$ عند محدات مجال تعريفها.

4 ـ أدرس تغييرات $f$ .

5 ـ أ ـ أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(Cf)$ .

ب ـ حدد وضع $(Cf)$ بالنسبة للمستقيم المقارب .

6 ـ أنشئ $(Cf)$ علما أنه يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما مختلفا الاشارة .

## الحل :

1ـ لنبين أن $f$ متصلة في الصفر :( الطريقة نبين $\lim_{x\to0^+} f(x)=f(0)$ و $\lim_{x\to0^-} f(x)=f(0)$ ).

** $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+} x^3\ln x-\frac{x^2}{2}=\lim_{x\to0^+} x^2\times x\ln x-\frac{x^2}{2}=0=f(0)$ ( لأن $\lim_{x\to0^+} x\ln x=0$ )

** $\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}}-x=0=f(0)$ ( لأن $\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$ ).

بما أن $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^-} f(x)=f(0)$ فإن الدالة $f$ متصلة في الصفر.

2 ـ لندرس اشتقاق $f$ في الصفر : ( لنحسب $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ و $\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ )

** $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^3\ln x-\frac{x^2}{2}-0}{x}=\lim_{x\to0^+} x^2\ln x-\frac{x}{2}=0$

** $\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}-x-0}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}-x}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}-1=\lim_{t\to-\infty} te^t-1=-1$

بوضع $t=\frac{1}{x}$ $\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}-1$ تصبح على الشكل $\lim_{t\to-\infty} te^t-1$ و لدينا $\lim_{t\to-\infty} te^t=0$ .

بما أن $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$ فإن $(Cf)$ يقبل نصف مماس أفقي معادلته $y=f(0)=0$

( لأن معادلة المماس ل $(Cf)$ في الصفر هي : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ )

بما أن $\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-1$ فإن $(Cf)$ يقبل نصف مماس معادلته $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

يعني $y=-1(x-0)+0$ أي $y=-x$

3 ـ لنحسب نهايات $f$ عند محدات مجموعة التعريف .

** $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3\ln x-\frac{x^2}{2}=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(x\ln x-\frac{1}{2}\right)=+\infty$

لأن $\lim_{x\to+\infty} x\ln x-\frac{1}{2}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} - x = +\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

4 ـ تغييرات الدالة f :

***ليكن $f(x) = x^3 \ln x - \frac{x^2}{2} \ : \ x \in ]0,+\infty[$

$$f'(x) = \left(x^3 \ln x - \frac{x^2}{2}\right)' = \left(x^3 \ln x\right)' - \left(\frac{x^2}{2}\right)'$$

$$= 3x^2 \ln x + x^3 \times \frac{1}{x} - \frac{2x}{2}$$

$$= 3x^2 \ln x + x^2 - x$$

*** ليكن $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - x \ : x \in ]-\infty,0[$

$$f'(x) = \left(e^{\frac{1}{x}} - x\right)' = \left(e^{\frac{1}{x}}\right)' - 1 = \left(\frac{1}{x}\right)' e^{\frac{1}{x}} - 1$$

$$= \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} - 1 = \frac{-e^{\frac{1}{x}} - x^2}{x^2}$$

$$= -\frac{e^{\frac{1}{x}} + x^2}{x^2}$$

** إشارة $f'(x)$ لكل $x \in \mathbb{R}$ .

*** $f'(x) = 3x^2 \ln x + x^2 - x$ في المجال $]0,+\infty[$ .

نلاحظ أن $f'(1) = 3\ln 1 + 1^2 - 1 = 0$ .

إذا كان $x \geq 1$ فإن $3\ln x \geq 0$ ومنه $3\ln x + 1 \geq 1$

و بالتالي $x^2(3\ln x + 1) \geq x^2$ ونعلم أن $x^2 \geq x$ لكل $x \geq 1$

إذن : $x^2(3\ln x + 1) \geq x$

ومنه : $x^2(3\ln x + 1) - x \geq 0$

بمعنى أن : $f'(x) \geq 0$ لكل $x \in [1,+\infty[$

إذا كان $0 < x \leq 1$ فإن $3\ln x \leq 0$ ومنه $3\ln x + 1 \leq 1$

و بالتالي $x^2(3\ln x + 1) \leq x^2$ ونعلم أن $x^2 \leq x$ لكل $0 < x \leq 1$

إذن : $x^2(3\ln x + 1) \leq x$

ومنه : $x^2(3\ln x + 1) - x \leq 0$

بمعنى أن : $f'(x) \leq 0$ لكل $x \in ]0,1]$

*** $f'(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}} + x^2}{x^2}$ في المجال $]-\infty,0[$

لدينا $f'(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}} + x^2}{x^2} < 0$ لكل $x \in ]-\infty,0[$ .

** نضع جدول تغييرات الدالة f .

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↘ | $-\frac{1}{2}$ | ↗ | $+\infty$ |

5 ـ أ ـ الفروع اللانهائية :

** لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ .

* $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 \ln x - \frac{x^2}{2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^2 \ln x - \frac{x}{2} = \lim_{x\to+\infty} x\left(x \ln x - \frac{1}{2}\right) = +\infty$$

إذن : $(Cf)$ يقبل فرعا شلجما بإتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$ .

**Chorfi_mouhsine@yahoo.fr**

** لدينا : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ .

* $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} - 1 = -1$ ( لأن : $\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ إذن $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = 0$ )

* $\lim_{x\to-\infty} f(x) + x = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} - x + x = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

إذن : $(Cf)$ يقبل مقاربا مائلا معادلته : $y = -x + 1$ بجوار $-\infty$ .

ب ـ الوضع النسبي لـ $(Cf)$ و المقارب المائل $y = -x + 1$ .

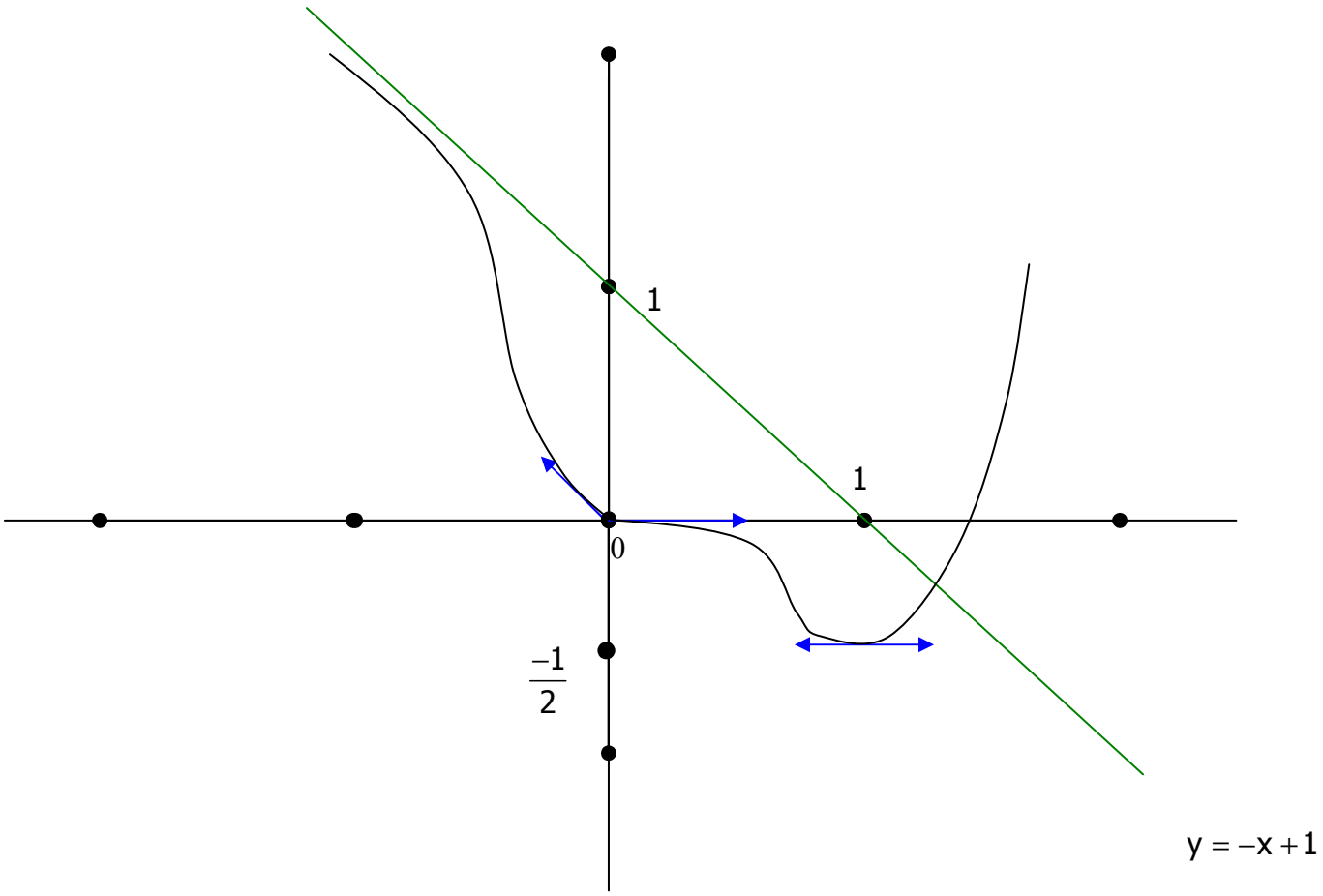
* $f(x) - (-x+1) = e^{\frac{1}{x}} - x + x - 1 = e^{\frac{1}{x}} - 1$ .

* بما أن $\frac{1}{x} \neq 0$ فإن $e^{\frac{1}{x}} \neq 1$ ومنه $e^{\frac{1}{x}} - 1 \neq 0$ إذن $f(x) - (-x+1) \neq 0$ .

* بما أن : $x < 0$ فإن $\frac{1}{x} < 0$ ومنه $e^{\frac{1}{x}} < 1$ و بالتالي $e^{\frac{1}{x}} - 1 < 0$ ومنه $f(x) < (-x+1)$ .

نستنتج أن $(Cf)$ تحت المقارب المائل $y = -x + 1$ .

6 ـ التمثيل المبياني




**Chorfi_mouhsine@yahoo.fr**